Théorème spectral et graphes de Moore

Trois niveaux de difficulté/longueur :

— Piste bleue : partie **1**. — Piste rouge : partie **2**.

— Piste noire : tout le devoir. La partie **3** est délicate et entièrement consacrée à une question de théorie des graphes.

1 Théorème spectral

1) Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *orthogonale* si elle est inversible et si $M^{-1} = M^\top$. L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

a) Soient E un espace euclidien de dimension non nulle, $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E et $\mathscr{B}'$ une base quelconque de E. Montrer que la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est orthogonale si et seulement si $\mathscr{B}'$ est orthonormale.

b) Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

2) Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geqslant 2$ — attention, M est symétrique. En tant que matrice complexe, M possède une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ associée à un vecteur propre $X \in \mathbb{C}^n$.

a) Calculer $\overline{X}^\top MX$ de deux manières et en déduire que $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que M possède un vecteur propre Y associé à λ dans $\mathbb{R}^n$.

c) Montrer que $\mathrm{Vect}(Y)^\perp$ est stable par l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M.

d) Montrer l'existence de deux matrices $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $M' \in \mathscr{S}_{n-1}(\mathbb{R})$ pour lesquelles $M = P\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & M' \end{pmatrix}P^{-1}$.

3) Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer l'existence d'une matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et de réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ pour lesquels $M = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,P^{-1}$.

b) En déduire que $\mathbb{R}^n$ possède une base orthonormale de vecteurs propres de M.

Les résultats des questions **3)a)** et **3)b)** sont deux manières d'énoncer le *théorème spectral*, dont le premier mérite immédiat consiste à assurer qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

4) a) Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si M est nilpotente, alors $M = 0$.

b) Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $M^k = I_n$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$, alors $M^2 = I_n$. Et si k est impair ?

c) Résoudre pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'équation $MM^\top M = \lambda I_n$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2 Théorème d'Hoffman-Singleton

Le théorème suivant date de 1960. On note J (resp. U) la matrice carrée de taille n (resp. la colonne de taille n) dont tous les coefficients valent 1.

Théorème (Théorème d'Hoffman-Singleton) Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\{0,1\}$ et de diagonale nulle.

Si $M^2 + M = J + (d-1)I_n = \begin{pmatrix} d & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & d & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & d \end{pmatrix}$ pour un certain $d \in \mathbb{N}^*$, alors $d \in \{1,2,3,7,57\}$.

Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients dans $\{0,1\}$ de diagonale nulle pour laquelle $M^2 + M = J + (d-1)I_n$.

5) a) Montrer que U est un vecteur propre de M, puis que $n = d^2 + 1$.

b) Montrer que $E_d(M) = E_n(J) = \mathrm{Vect}(U)$.

6) a) Déterminer les valeurs propres de J.

À présent, soit λ une valeur propre réelle de M autre que d.

b) Déterminer un réel μ pour lequel $E_\lambda(M) \subset E_\mu(J)$, puis montrer que $\mu = 0$.

c) En déduire que λ vaut α ou β avec $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{4d-3}}{2}$ et $\beta = \dfrac{-1-\sqrt{4d-3}}{2}$.

D'après le théorème spectral, il existe une matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et des entiers $p, q \in \mathbb{N}$ pour lesquels $M = P\begin{pmatrix} d & & \\ & \alpha I_p & \\ & & \beta I_q \end{pmatrix} P^{-1}$. La valeur propre d est comptée une seule fois car $\dim E_d(M) = 1$ d'après **5)b)**.

7) **a)** Montrer que : $\quad p+q+1 = n, \quad d + p\alpha + q\beta = 0 \quad$ et $\quad (p-q)\sqrt{4d-3} = d(d-2)$.

b) On suppose $d \neq 2$. Montrer que $4d-3$ est le carré d'un entier, puis que $d \in \{1, 3, 7, 57\}$.

Le théorème d'Hoffman-Singleton est ainsi démontré. On connaît des exemples de matrices satisfaisant le théorème pour $d \in \{1, 2, 3, 7\}$, mais aucune à ce jour pour $d = 57$. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ si } d = 1, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ si } d = 2 \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ si } d = 3.$$

Pour $d = 7$, les exemples sont de taille 50. Pour $d = 57$, les matrices cherchées sont de taille 3250 !

3 Graphes de Moore

En dépit des apparences, le théorème d'Hoffman-Singleton appartient comme on va le voir à la théorie des graphes. Soit E un ensemble fini non vide. On se donne un *graphe* Γ *sur* E, i.e. une partie de l'ensemble $\mathscr{P}_2(E)$ des paires d'éléments de E.

— Les éléments de Γ sont appelés ses *arêtes* et les éléments de E ses *sommets*. Pour tous $x, y \in E$, on dit que y est *adjacent à* x (*dans* Γ) si $\{x, y\} \in \Gamma$. L'arête $\{x, y\}$ est plutôt notée xy ou yx.

— Étant donnée une indexation $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ des sommets de Γ, on appelle *matrice d'adjacence de* Γ la matrice carrée de taille n dont le coefficient de position (i, j) vaut 1 si x_i et x_j sont adjacents et 0 sinon, et ce pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$.

— Pour tout $x \in E$, le nombre de sommets de Γ adjacents à x est appelé le *degré de* x (*dans* Γ). Le maximum des degrés des sommets de Γ est appelé le *degré maximal de* Γ. On dit enfin que Γ est *régulier de degré* d si ses sommets ont tous le même degré d.

— Soient $x, y \in E$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on appelle *chemin de longueur* p *d'extrémités* x *et* y *dans* Γ tout ensemble d'arêtes de Γ de la forme $\{x_0x_1, x_1x_2, \ldots, x_{p-1}x_p\}$ avec $x_0, \ldots, x_p \in E$ et $x_0 = x$ et $x_p = y$. Un tel chemin est plutôt noté $x_0x_1 \ldots x_p$. On appelle alors *distance de* x *à* y (*dans* Γ) la longueur minimale d'un chemin d'extrémités x et y dans Γ si un tel chemin existe. Dans le cas contraire, on convient que la distance de x à y vaut $+\infty$. On appelle enfin *diamètre de* Γ la plus grande distance possible entre deux sommets de Γ, éventuellement $+\infty$.

8) Soit Γ un graphe régulier de degré d et de diamètre 2.

a) Montrer que Γ possède au plus d^2+1 sommets.

b) Montrer que si Γ contient un triangle $\{x_0x_1, x_1x_2, x_2x_0\}$, il possède au plus d^2-1 sommets.

c) Montrer que si Γ contient un 4-cycle $\{x_0x_1, x_1x_2, x_2x_3, x_3x_0\}$, il possède au plus d^2 sommets.

d) En déduire que si Γ possède d^2+1 sommets, alors $d \in \{1, 2, 3, 7, 57\}$.

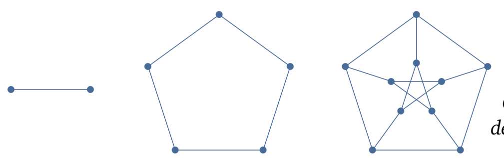
9) Soit Γ un graphe de diamètre Δ et de degré maximal d. Montrer que Γ possède au plus $1 + d\displaystyle\sum_{k=0}^{\Delta-1}(d-1)^k$ sommets et qu'en cas d'égalité, Γ est régulier de degré d.

Les graphes pour lesquels la majoration de la question **9)** est une égalité sont appelés les *graphes de Moore*. En particulier, tout graphe de Moore est régulier. Et d'après **8)d)**, le degré d'un graphe de Moore de diamètre 2 vaut 1, 2, 3, 7 ou 57.

10) **a)** Déterminer les graphes de Moore de diamètre 1.

b) Montrer que pour tout $\Delta \in \mathbb{N}^*$, $\Big\{\{0,1\}, \{1,2\}, \ldots, \{2\Delta-1, 2\Delta\}, \{2\Delta, 0\}\Big\}$ est un graphe de Moore.

En poussant plus loin les techniques d'Hoffman et Singleton, on peut montrer que les cycles de la question **9)b)** sont les seuls graphes de Moore de diamètre supérieur à 3. Enfin, pour $d \in \{1, 2, 3, 7\}$, on sait qu'il n'existe qu'un et un seul graphe de Moore de diamètre 2 et de degré d. Les voici pour $d \in \{1, 2, 3\}$.



Graphe de Petersen